Intégration sur un segment

Calculs d'intégrales

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2}$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-t}\,dt$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 te^{t^2}dt$ 2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt$ 3) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$ 4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(t)\,dt$

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)dt$ 2) $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}dt$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}dt$

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin(t)dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(t)dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+it}$

Exercice 6 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2-2t+2}$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1}$ 3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t(t^2-1)}$ *(décomposition)*

Exercice 7 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+2t+2}dt$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$ 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t^2+1)}$ *(décomposition)*

Exercice 8 : Calculer, selon les valeurs de $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, l'intégrale suivante :

$$I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt$$

Intégration par parties

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^e t\ln(t)dt$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)dt$

Exercice 10 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 (t^2-t+1)e^{-t}dt$

Exercice 11 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} (t-\pi)\sin(t)dt$ 2) $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln(t))dt$ 3) $\displaystyle\int_1^e t^n\ln(t)dt$ (avec $n\in\mathbb{N}$)

Exercice 12 * : Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2}dt$ *(IPP+décomposition)*

Changement de variables

Exercice 13 : Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}$ 2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}}{1+e^t}dt$

Exercice 14 : Calculer les intégrales à l'aide d'un changement de variable :

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ 2) $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^5}{1+t^{12}}dt$

Exercice 15 : Calculer les intégrales à l'aide du changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, $(t=\sqrt{u^2+1})$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$, $(t=\ln(u))$

Exercice 16 : Calculer les intégrales à l'aide du changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$, $(t=\sin(u))$ 2) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$, $(t=\sin(u))$

Exercice 17 : Calculer les intégrales à l'aide du changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t+t\ln(t)}$, $(t=e^u)$ 2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2}dt$, $(t=\frac{1}{u})$

Exercice 18 : Calculer les intégrales à l'aide du changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^t-1}dt$, $(u=\sqrt{e^t-1})$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt$, $(t=\ln(u))$

Exercice 19 : Calculer les intégrales à l'aide du changement de variable proposé :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(t)}dt$, $(u=\tan(t))$ 2) $\displaystyle\int_0^{\ln(4)} \frac{1}{e^{2t}+e^t}dt$, $(t=\ln(u))$

Exercice 20 : Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^t+1}}dt$

Exercice 21 :

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$

2) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $1+\tan(x) = \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{2}.\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos(x)}$.

3) Déduire de ce qui précède $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))dt$

Exercice 22 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [a,b]$, $f(a+b-x) = f(x)$

Montrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Intégrales fonctions des bornes

Exercice 23 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer leur dérivée :

1) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ 2) $g(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t)dt$ 3) $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)dt$

Exercice 24 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et exprimer sa dérivée.

Exercice 25 * : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t)g(x-t)dt$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$
2) Montrer alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$

Sommes de Riemann

Exercice 26 : Déterminer les limites des suites définies par le terme général :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ 2) $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$ 3) $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Exercice 27 : Déterminer les limites des suites définies par le terme général :

1) $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ 2) $v_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ 3)* $w_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 28 :
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de :

1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ 2) $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+2k)^3}$

Exercice 29 * : Soit $f : x \mapsto \sin(x)$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 à f entre 0 et x, montrer que $|\sin(x)-x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$.
2) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.
3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{n+1}{n^3}$.
   En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3}$.
4) Déterminer alors la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

Exercice 30 * : Soit $f : x \mapsto \sin^2(x)$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 à f entre 0 et x, montrer que $|\sin^2(x)-x^2| \leqslant \dfrac{|x|^4}{3}$.
2) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{n}$.
   En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$.
4) Déterminer alors la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$

Formules de Taylor

Exercice 31 : Établir, en utilisant une formule de Taylor bien choisie, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 32 : Établir, en utilisant une formule de Taylor bien choisie, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Exercice 33 : Établir, en utilisant une formule de Taylor bien choisie, que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ 0 \leqslant \left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^6}{720}$$

Exercice 34 :

1) Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Établir que $\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$
2) Établir, en utilisant une formule de Taylor bien choisie, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ 0 \leqslant \left|\ln(1+x) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right)\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ et préciser sa somme.

Exercice 35 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$

Exercice 36 (Égalité de Taylor-Lagrange) * :
Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
Établir, en utilisant une formule de Taylor bien choisie, que :

$$\forall x \in I \ , \ \exists c \in I \ , \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 37 * :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) \underset{0}{=} o(x^n)$.

1) Montrer que : $\forall p \in [\![0, n]\!] \ , \ \varphi^{(p)}(x) \underset{0}{=} o(x^{n-p})$.
2) Soit $\psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$
Montrer que : $\forall p \in [\![0, n-1]\!] \ , \ \psi^{(p)}(x) \underset{0}{=} o(x^{n-p-1})$
En déduire que ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
3) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ f'(0) & , \text{ sinon} \end{cases}$
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
4) Soient f, g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $g'(0) \neq 0$.
Montrer que $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Suite d'intégrales

Exercice 38 (Intégrales de Wallis) * :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$ et $I_n > 0$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.
3) *(en plus)* Donner les expressions de I_n à l'aide de factorielles *(distinguer les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$)*
4) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$
5) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 39 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$ et calculer I_0.
3) Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) = e - I_n$
4) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{k!}$ et préciser sa somme.

Exercice 40 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n dx$

1) Calculer I_0 et I_1. Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
3) Déterminer la limite de la suite (I_n), puis un équivalent simple de I_n.

Exercice 41 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante, de limite nulle.
2) Montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que $(-1)^n I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + I_0$.
3) Calculer I_0. En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ et préciser sa somme.
4) Exploiter $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Exercice 42 :

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$.
2) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{t^2+1} dt$.
3) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$
4) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ et préciser sa somme.

FIN DES ÉNONCÉS